

۱- نوع نقطه $x_0 = 0$ را که معادله $(1+x^2)y'' + 3xy' + 4y = 0$ تعیین می‌کند بررسی کنید.

را حل کنید و معادله را به صورت سری توانی بنویسید.

$$y'' + \frac{3x}{1+x^2}y' + \frac{4}{1+x^2}y = 0$$

چون $q(x) = \frac{4}{1+x^2}$ و $p(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ و $x_0 = 0$ یک نقطه عادی است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \& \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} + (n^2 - n + 3n + 4) a_n] x^n = 0$$

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + (n^2 + 2n + 4) a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + 2n + 4}{(n+1)(n+2)} a_n \quad n \geq 0$$

$$n=0 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{2} a_0 = 2a_0 \quad n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{7}{6} a_1$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{12}{12} a_2 = 2a_0$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{19}{20} a_3 = \frac{133}{120} a_1$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

بنابر این

$$y = a_0 (1 + 2x^2 + 2x^4 + \dots) + a_1 (x + \frac{7}{6}x^3 + \frac{133}{120}x^5 + \dots)$$

۲- نوع نقطه $x_0 = 0$ را بررسی می‌کنیم

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0 \quad \text{تعیین کنید}$$

سپس جواب معادله را حول همین نقطه بصورت سری توانی بنویسیم

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{12}{1-x^2}y = 0$$

معادله را در $x_0 = 0$ بررسی می‌کنیم. $q(x) = \frac{12}{1-x^2}$, $p(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$

معادله را در $x_0 = 0$ بنویسیم

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \& \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \& \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

با جایگزینی در معادله داریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 12 a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \underbrace{(-n^2 + n - 2n + 12)}_{-(n^2 + n - 12)} a_n \right] x^n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{-(n-3)(n+4)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad n \geq 0$$

$$n=0 \Rightarrow a_2 = \frac{12}{2} a_0 = 6a_0$$

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{10}{6} a_1 = \frac{5}{3} a_1$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{6}{12} a_2 = \frac{1}{2} a_2 = 3a_0$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = 0$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{-8}{30} a_4 = \frac{-4}{15} a_4 = \frac{-12}{15} a_0 = -\frac{4}{5} a_0$$

$$a_7 = a_9 = \dots = a_{2k+1} = 0$$

$$n=6 \Rightarrow a_8 = \frac{-30}{56} a_6 = \frac{-15}{28} a_6 = \frac{3}{7} a_0$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

در نتیجه

$$y = a_0 \left(1 + 6x^2 + 3x^4 - \frac{4}{5}x^6 + \frac{3}{7}x^8 + \dots \right)$$

$$+ a_1 \left(x + \frac{5}{3}x^3 \right)$$

همانطور که مشخص می شود چند جمله ای بارچا فرکان فکتوم و بارچا = زوج رکن
نا فکتوم است اینجاست حالت خاص از مساله اثر اندر است که حالت

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$$

p عددی ثابت

کلی رکن بصورت

است.

۳- معادله دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر $y = ux$ به معادله ریدل تبدیل کرده و جواب

آن را بصورت تابعی از ریدل بنویسید $(*) \quad xy'' - y' + xy = 0$

توضیح: معادله ریدل بصورت $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ است که جواب آن

عبارت از
$$j_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

آنون باید معادله $(*)$ را با تغییر متغیر $y = ux$ به ریدل تبدیل کنیم

$$y = ux \rightarrow y' = u'x + u \rightarrow y'' = u''x + u' + u' = u''x + 2u'$$

با جایگذاری در $(*)$ داریم
$$x(u''x + 2u') - (u'x + u) + x(ux) = 0$$

$$x^2 u'' + 2xu' - xu' - u + x^2 u = 0 \Rightarrow x^2 u'' + xu' + (x^2 - 1)u = 0$$

که در اینجا یک معادله ریدل که در آن $p=1$ بنا داریم

$$u = j_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

۴- با تغییر متغیر $x = z^{-1/2}$ معادله

$$(*) \quad x^2 y'' + 2x y' + (x^2 - 1)y = 0$$

را به شکل z تبدیل کرده و جواب را صورت تابع z بنویسید.
توضیح کنید به چه دلیل به این شکل تبدیل کرده و جواب ضرب $2x$ در عبارت y' فعلی معادله

استاندارد را به شکل $(x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2)y = 0)$ بنویسید

$$y = x^{-1/2} z \rightarrow y' = -\frac{1}{2} x^{-3/2} z + x^{-1/2} z'$$

$$y'' = \frac{3}{4} x^{-5/2} z - \frac{1}{2} x^{-3/2} z' - \frac{1}{2} x^{-3/2} z' + x^{-1/2} z''$$

$$y'' = \frac{3}{4} x^{-5/2} z - z' x^{-3/2} + \frac{3}{4} z x^{-5/2}$$

$$\underbrace{z'' x^{-1/2} - z' x^{-3/2} + \frac{3}{4} z x^{-5/2}}_{x^2 y''} + 2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2} z x^{-1/2} + z' x^{1/2} \right)}_{x y'} + \underbrace{(x^2 - 1) x^{-1/2} z}_{x y}$$

$$+ (x^2 - 1) x^{-1/2} z$$

$$x z'' + x z' + \left(\frac{3}{4} z - z + (x^2 - 1) z \right) x^{-1/2} = 0$$

$$x z'' + x z' + \left(x^2 - \frac{5}{4} \right) z = 0$$

$$z = \int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(n + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

۵- دستگاه درجه دوم و دو مجهول زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad \begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$$

الف) بار را بر حذف

$$x' = 4x - y \quad (I)$$

$$y' = 2x + y \quad (II)$$

از طرفین (I) نسبت به t مشتق می‌گیریم

$$x'' = 4x' - y'$$

از (II) $y' = 2x + y$ را در x' جایگزین می‌کنیم

$$x'' = 4x' - (2x + y)$$

$$= 4x' - 2x - y$$

مجدداً از (I) $y = 4x - x'$ را در x' جایگزین می‌کنیم

$$(I) \rightarrow y = 4x - x' \quad (III)$$

$$x'' = 4x' - 2x - 4x + x' = x'' - 5x' + 6x = 0$$

معادله خطی مرتبه دوم به دست می‌آید

$$m^2 - 5m + 6 = 0 \quad m_1 = 2 \quad m_2 = 3$$

$$\Rightarrow x_g(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

که می‌توانیم y را از (III) داریم

$$y = 4C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{3t} - 2C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{3t}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \end{cases}$$

یا استفاده از دترمینان

$$\frac{dx}{dt} = 4x - y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (D-4)x + y = 0 \\ -2x + (D-1)y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ D-4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-4 & 1 \\ -2 & D-1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{D^2-5D+6} \Rightarrow (D^2-5D+6)x = 0$$

$$D^2-5D+6=0 \begin{cases} D_1=2 \\ D_2=3 \end{cases} \Rightarrow x_g = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

از رابطه (*) ی را می یابیم

$$y_g = -(D-4)x$$

$$y_g = -(D-4)(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t})$$

$$= -(2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t} - 4c_1 e^{2t} - 4c_2 e^{3t})$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ y = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \end{cases}$$

۴ دستگاه زیر را حل کنید

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y$$

$$x = x(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + y$$

$$y = y(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + 3y & (I) \\ y' = 3x + y & (II) \end{cases}$$

از طرف (I) نسبت t مشتق می‌گیریم

$$x'' = x' + 3y'$$

از (II) y' را جایگزین می‌کنیم

$$x'' = x' + 3(3x + y) = x' + 9x + 3y$$

از (I) $y = \frac{1}{3}(x' - x)$ (III)

$$x'' = x' + 9x + x' - x \Rightarrow x'' - 2x' - 8x = 0$$

$$m^2 - 2m - 8 = 0 \quad m_1 = 4, m_2 = -2$$

$$x_g(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}$$

از رابطه (III)

$$y_g = \frac{1}{3} (4C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{-2t} - C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t})$$

$$x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}$$

$$y = C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t}$$

راه دوم: روش ابرماتریس

$$(D-1)x - 3y = 0 \quad (IV)$$

$$-3x + (D-1)y = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & D-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-1 & -3 \\ -3 & D-1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{D^2 - 2D - 8}$$

$$(D^2 - 2D - 8)x = 0$$

$$(D-4)(D+2) = 0 \quad \begin{cases} D_1 = 4 \\ D_2 = -2 \end{cases}$$

$$x_g(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}$$

از رابطه (IV)

$$y = \frac{1}{3}(D-1)x$$

$$= \frac{1}{3}(D-1)[C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}]$$

$$= \frac{1}{3}[4C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{-2t} - C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t}]$$

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} \\ y &= C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} \\ y &= C_1 e^{4t} - C_2 e^{-2t} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} x' = x + y - 5t + 2 & \text{(I)} \\ y' = 4x - 2y - 8t - 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

از طرف (I) نسبت به مشتق می‌گیریم

$$x'' = x' + y' - 5$$

از (II) y' را حذف می‌کنیم

$$x'' = x' + 4x - 2y - 8t - 8 - 5$$

$$x'' = x' + 4x - 2y - 8t - 13$$

از (I) y را حذف می‌کنیم

$$y = x' - x + 5t - 2 \quad \text{(III)}$$

ما جاندازی داریم

$$x'' = x' + 4x - 2(x' - x + 5t - 2) - 8t - 13$$

$$x'' = -x' + 6x - 18t - 9$$

$$x'' + x' - 6x = -18t - 9 \quad (IV)$$

$$x'' + x' - 6x = 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow (m+3)(m-2) = 0$$

$$x_g = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

$$x_p = A_0 + A_1 t \Rightarrow x'_p = A_1 \Rightarrow x''_p = 0$$

(IV) ما جاندازی داریم

$$0 + A_1 - 6A_0 - 6A_1 t = -18t - 9$$

$$-6A_1 = -18 \Rightarrow A_1 = 3$$

$$A_1 - 6A_0 = -9 \Rightarrow A_0 = 2$$

$$\Rightarrow x_p = 2 + 3t$$

$$x_g(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} + 3t + 2$$

$$y_g(t) = -3C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t} + 3 - C_1 e^{-3t} - C_2 e^{2t} - 3t + 2 + 5t - 2$$

از (III) داریم

$$x_g(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} + 3t + 2$$

$$y_g(t) = -4C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} + 2t + 1$$

۸- دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - 3y + 8e^t \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + 4e^t \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$$

با عینیت اگر اندیشه شود اولی را در دایره با استیلا از تبدیل میگیریم $8e^t = 8 \frac{e^t}{s-1}$ و در هر دو طرف

$$\begin{cases} x' = 6x - 3y + 8e^t \\ y' = 2x + y + 4e^t \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} L\{x'\} = 6L\{x\} - 3L\{y\} + 8L\{e^t\} \\ L\{y'\} = 2L\{x\} + L\{y\} + 4L\{e^t\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x(0) + sL\{x\} = 6L\{x\} - 3L\{y\} + \frac{8}{s-1} \\ -y(0) + sL\{y\} = 2L\{x\} + L\{y\} + \frac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 + (s-6)L\{x\} + 3L\{y\} = \frac{8}{s-1} \\ -2L\{x\} + (s-1)L\{y\} = \frac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-6)L\{x\} + 3L\{y\} = 1 + \frac{8}{s-1} = \frac{s+7}{s-1} \\ -2L\{x\} + (s-1)L\{y\} = \frac{4}{s-1} \end{cases}$$

$$L\{x\} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s+7}{s-1} & 3 \\ \frac{4}{s-1} & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-6 & 3 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s^2+6s-19}{s-1}}{s^2-7s+12} = \frac{s^2+6s-19}{(s-1)(s^2-7s+12)}$$

$$x = L^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s - 19}{(s-1)(s-7)(s-4)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-7} + \frac{C}{s-4} \right\}$$

$$= L^{-1} \left\{ \frac{-2}{s-1} + \frac{7}{s-7} + \frac{4}{s-4} \right\} = -2e^t + 7e^{7t} - 4e^{4t}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s-6 & s+7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{(s-3)(s-4)} = \frac{6s-10}{(s-3)(s-4)}$$

$$y = L^{-1} \left\{ \frac{6s-10}{(s-1)(s-3)(s-4)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-4} \right\}$$

$$y = \frac{-2}{3}e^t - 4e^{3t} + \frac{14}{3}e^{4t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = -2e^t - 4e^{3t} + 7e^{4t} \\ y(t) = \frac{-2}{3}e^t - 4e^{3t} + \frac{14}{3}e^{4t} \end{array} \right.$$

$$y(t) = \frac{-2}{3}e^t - 4e^{3t} + \frac{14}{3}e^{4t}$$

نهایی

۹. معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' + 4y' - 12y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = -1$$

$$L\{y''\} + 4L\{y'\} - 12L\{y\} = 0$$

$$-y'(0) - sy(0) + s^2 L\{y\} + 4(-y(0) + sL\{y\}) - 12L\{y\} = 0$$

$$(s^2 + 4s - 12)L\{y\} = 5 + 3 \Rightarrow L\{y\} = \frac{s+3}{s^2 + 4s - 12}$$

$$y = L^{-1} \left\{ \frac{s+3}{(s-2)(s+6)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{5/8}{s-2} + \frac{3/8}{s+6} \right\}$$

$$y = \frac{5}{8} e^{2x} + \frac{3}{8} e^{-6x}$$

۱۰. معادله دیفرانسیل زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' + 3y' + 5y = 0$$

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$L\{y''\} + 3L\{y'\} + 5L\{y\} = 0$$

$$-y'(0) - sy(0) + s^2 L\{y\} + 3(-y(0) + sL\{y\}) + 5L\{y\} = 0$$

$$-1 - s + s^2 L\{y\} - 3 + 3sL\{y\} + 5L\{y\} = 0$$

$$(s^2 + 3s + 5)L\{y\} = s + 4$$

$$y = L^{-1} \left\{ \frac{s+4}{s^2 + 3s + 5} \right\}$$

$$y = L^{-1} \left\{ \frac{s + 3/2 + 5/2}{(s + 3/2)^2 + \frac{11}{4}} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{s + 3/2}{(s + 3/2)^2 + (\frac{\sqrt{11}}{2})^2} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{5/2}{\frac{\sqrt{11}}{2} \left((s + 3/2)^2 + (\frac{\sqrt{11}}{2})^2 \right)} \right\}$$

$$y = e^{-3/2 x} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + \frac{5}{\sqrt{11}} e^{-3/2 x} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x$$

۱۱- سایر زیر را با استفاده از تبدیل به دست آورید.

$$y' + y = x e^{-x}$$

$$y(0) = 2$$

$$L\{y'\} + L\{y\} = L\{x e^{-x}\}$$

نکته: اگر $L\{f(x)\} = F(s)$ آنگاه

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$-y(0) + sL\{y\} + L\{y\} = -\left(\frac{1}{s+1}\right)'$$

$$-2 + (s+1)L\{y\} = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow (s+1)L\{y\} = 2 + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$L\{y\} = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^3} \Rightarrow y = L^{-1} \left\{ \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^3} \right\}$$

$$y = 2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x}x^2$$