

به نام خداوند جان و خرد

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی (۲) رشته های فنی و مهندسی

وقت: ۱۰۰ دقیقه

(1) نزدیکترین نقطه واقع بر رویه $x^2 - z^2 = 1$ تا مبدا مختصات را بیابید. (۱۵ نمره)

(2) مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

$$\int_{(0\ 0\ 0)}^{(1\ 1\ 1)} (yz + x)dx + (xz + y)dy + (xy + z)dz$$

(3) انتگرال دوگانه زیر را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin(\pi y^3) dy dx$$

(4) مساحت ناحیه محصور به منحنی های $y = \frac{1}{x}$ ، $y = \frac{3}{x}$ ، $y = 2x$ و $y = 3x$ واقع در ربع اول

مختصات را بیابید. (۲۰ نمره)

(5) انتگرال سه گانه زیر را در ناحیه E واقع در درون $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ، بیرون $x^2 + y^2 = 1$

و $z \geq 0$ محاسبه کنید.

$$\iiint_E \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV$$

پیروز باشید.

پانچ سوالات امتحان پایان ترم ریاضی ۲ سال تحصیلی ۴۰۱-۴۰۲

۱. نزدیکترین نقاط واقع بر روی $x^2 - z^2 = 1$ تا مبدأ مختصات

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \Rightarrow 2x - 2\lambda x = 0 \Rightarrow 2x(1 - \lambda) = 0 & (1) \\ f_y - \lambda g_y = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_z - \lambda g_z = 0 \Rightarrow 2z + 2\lambda z = 0 \Rightarrow 2z(1 + \lambda) = 0 & (3) \end{cases}$$

if $x = 0 \xrightarrow{(1)} -z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = -1$ غلط $\Rightarrow x \neq 0 \xrightarrow{(1)}$

$1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \xrightarrow{(3)} 2z(1 + 1) = 0 \Rightarrow 4z = 0 \Rightarrow z = 0$

$\xrightarrow{(4)} x^2 - z^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1, 0, 0), (-1, 0, 0)$ نقاط مورد نظر

۲. $I = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \underbrace{(yz+x)}_M dx + \underbrace{(xz+y)}_N dy + \underbrace{(xy+z)}_P dz$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = x = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ میدان برداری کامل. $\int M dx = \int yz + x dx = xyZ + \frac{x^2}{2}$

$$\int N dy = \int xz + y dy = xyZ + \frac{y^2}{2}$$

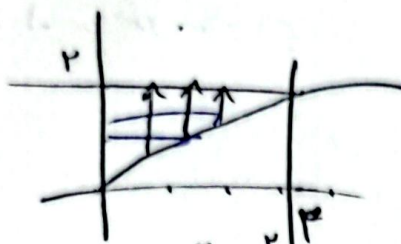
$$\int P dz = \int xy + z dz = xyZ + \frac{z^2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = xyZ + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

طبق قضیه استقلال داریم $I = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{2}$

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2}} \sin(\pi y^2) dy dx$$

۳-



$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

تغییر جای حدود

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 \sin \pi y^2 dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \sin \pi y^2 \left(\int_{y^2}^2 dx \right) dy$$

$$\int_{y^2}^2 dx = x \Big|_{y^2}^2 = 2 - y^2 \rightarrow I = \int_0^{\sqrt{2}} \sin \pi y^2 (2 - y^2) dy = \frac{-1}{3\pi} \cos \pi y^3 \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

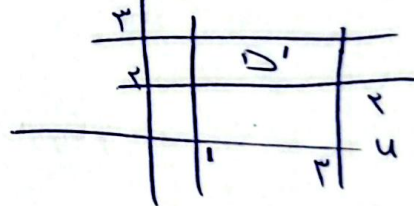
$$\pi y^3 = u \Rightarrow 3\pi y^2 dy = du \quad = \frac{-1}{3\pi} (1 - 1) = 0$$

۴- ماتریکس جاکوبی معنی های $y = 3x, y = 2x, y = \frac{3}{x}, y = \frac{1}{x}$

$$\begin{cases} xy = 1, xy = 3 \\ \frac{y}{x} = 2, \frac{y}{x} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = u \Rightarrow 1 < u < 3 \\ \frac{y}{x} = v \Rightarrow 2 < v < 3 \end{cases}$$

$$J' = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = \frac{2y}{x} \Rightarrow$$

$$J = \frac{1}{J'} = \frac{1}{2} \frac{x}{y} = \frac{x}{2y}$$



$$A = \iint_D dx dy = \iint_{D'} J du dv$$

$$= \int_1^3 \int_2^3 \frac{x}{2y} dv du \quad \int_2^3 \frac{1}{v} dv = \ln v = \ln 3 - \ln 2$$

$$\int_1^3 du = u \Big|_1^3 = 3 - 1 = 2 \quad A = 2 \times 2 (\ln 3 - \ln 2) = 4 \ln \frac{3}{2}$$

$$I = \iiint_E \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dv$$

۵- سطح در درون $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و درون $z = 1, x^2 + y^2 = 1$

$$I = \iiint_E \frac{z \cdot r dz dr d\theta}{r} \quad \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\int_1^{\sqrt{4-r^2}} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{4-r^2}} = \frac{1}{2} (4 - r^2 - 1)$$

$$\int_0^1 (4 - r^2) dr = \left(4r - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$